L'essentiel

1 Tangente à une courbe en un point

La **tangente à une courbe** au point M :

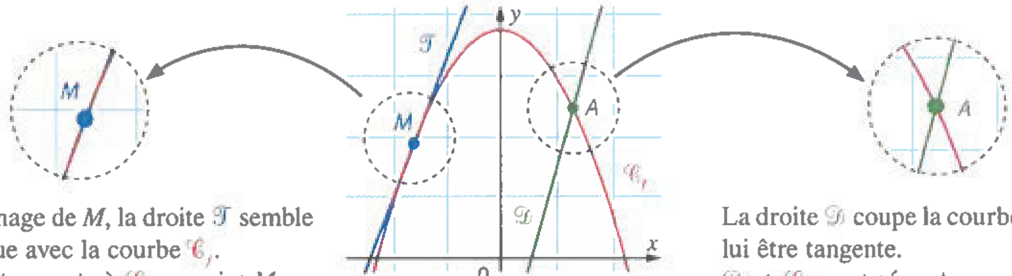
– est la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage du point M ;

– « touche » la courbe au point M. Ce point est donc commun à la courbe et à la tangente.

! Remarque : Une droite est **sécante** à une courbe lorsqu'elle coupe cette courbe, c'est-à-dire qu'elle a un point commun avec la courbe sans lui être tangente.

Exemple

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f.



Au voisinage de M, la droite $\mathscr{T}$ semble confondue avec la courbe $\mathscr{C}_f$.
$\mathscr{T}$ est la **tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point M.

La droite $\mathscr{D}$ coupe la courbe $\mathscr{C}_f$ sans lui être tangente.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_f$ sont **sécantes** en A.

- L'équation d'une tangente est de la forme : $y = ax + b$, où a est le **coefficient directeur.**
- Si $a > 0$, alors la droite « **monte** ». Si $a < 0$, alors la droite « **descend** ».

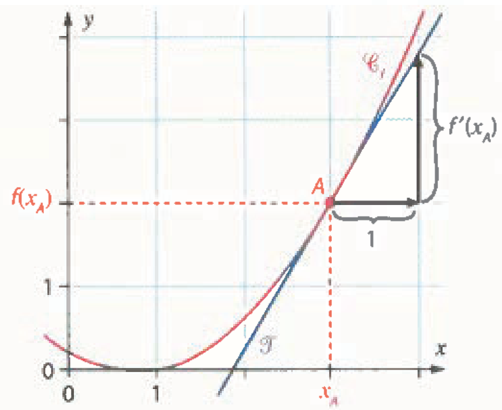
2 Nombre dérivé et équation réduite d'une tangente

- Le **nombre dérivé** $f'(x_A)$ est le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe représentative de la fonction f au point $(x_A\,;\,f(x_A))$.

  ! Remarque : $f'(x_A)$ se lit « f prime de x_A ».

- L'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en un point $A(x_A\,;\,f(x_A))$ est :

$$y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$$

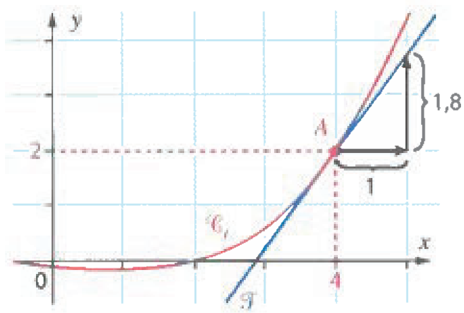


Exemple

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(4\,;\,2)$.
On lit sur le graphique que le coefficient directeur de $\mathscr{T}$ est
$f'(x_A) = \dfrac{1{,}8}{1} = 1{,}8.$

L'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ est donc :

$$y = 1{,}8 \times (x - 4) + 2$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 1{,}8 \times x - 1{,}8 \times 4 + 2$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 1{,}8x - 5{,}2$$



3 Fonction dérivée

- Une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si, pour tout x de l'intervalle I, la fonction admet un nombre dérivé noté $f'(x)$.
- On appelle **fonction dérivée** la fonction notée f' qui, à x, associe le nombre dérivé $f'(x)$.

  ! Remarque : La fonction dérivée f' permet de calculer les coefficients directeurs de toutes les tangentes à la courbe représentative de la fonction f.
- **Règles de dérivation**

Les expressions des fonctions dérivées notées dans les tableaux ci-dessous sont admises.
a et b désignent des nombres réels.

Expression de la fonction f	Expression de la fonction f'	Exemple
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	Si $f(x) = 7$, alors $f'(x) = 0$.
$f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$	$f'(x) = a$	Si $f(x) = 3x + 9$, alors $f'(x) = 3$.
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

- u et v sont des fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et k est un nombre **réel.**

Expression de la fonction f	Expression de la fonction f'	Exemple
$k \times u(x)$	$k \times u'(x)$	Si $f(x) = 6x^2$, alors $f'(x) = 6 \times 2x = 12x$.
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	Si $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, alors $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

4 Étude des variations d'une fonction

- Le **sens de variation d'une fonction f** est donné par le **signe de sa dérivée f'**.
- Pour une fonction f définie et dérivable sur un intervalle $I = [a\,;b]$:
  - si, pour tout x de I, **$f'(x) < 0$**, alors la fonction **f est décroissante** sur I.
  - si, pour tout x de I, **$f'(x) > 0$**, alors la fonction **f est croissante** sur I.
  - si, pour une valeur $x = c$ de I, la fonction dérivée f' s'annule **en changeant de signe**, alors **la** fonction f admet un **extremum local** en c sur I dont la valeur est $f(c)$.

x	a		c		b
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Sens de variation de f	$f(a)$	↗	$f(c)$	↘	$f(b)$

Pour $x = c$, $f'(c) = 0$ et la fonction f admet un **maximum** égal à $f(c)$.

x	a		c		b
Signe de $f'(x)$		−	0	+	
Sens de variation de f	$f(a)$	↘	$f(c)$	↗	$f(b)$

Pour $x = c$, $f'(c) = 0$ et la fonction f admet un **minimum** égal à $f(c)$.

- La plus petite et la plus grande valeur de $f(x)$ sont les **extremums globaux** de f sur I.

Exemple

Soit la fonction g définie sur $[-4\,;3]$ par $g(x) = x^2 - x - 0{,}75$.
La fonction g', dérivée de la fonction g, est définie par :
$g'(x) = 2x - 1$ donc pour $x = 0{,}5$, $g'(x) = 0$.
Pour $x < 0{,}5$: $g'(x) < 0$, et pour $x > 0{,}5$: $g'(x) > 0$.
g est donc décroissante sur $[-4\,;0{,}5]$, croissante sur $[0{,}5\,;3]$ et admet un minimum égal à -1 pour $x = 0{,}5$.

x	-4		$0{,}5$		3
Signe de $g'(x)$		−	0	+	
Sens de variation de g	$g(-4) = 19{,}25$	↘	-1	↗	$g(3) = 5{,}25$